

هواکشی ، بیستین دوره مسابقات ریاضی خدام (جستواره) گروه یازدهم تحریر
۱۲۰ دقیقه

سوال (الف) نشان دهید : $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

ب) در یک معادله ی درجه ی دوم بارشیه های x_1 و x_2 ، اگر S را مجموع
دورشیه و P را حاصل ضرب دورشیه بنامیم داریم : $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P$

ج) اگر $x_1 = \sin x$ ، $x_2 = \cos x$ رشیه های معادله ی

درجه دوم $x^2 - x - a = 0$ باشند ، حاصل عبارت زیر را

محاسبه کنید : $A = \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x + \cot x$

سوال (۲) الف) در معادله ی گزاریتی $x^{-6 + \log_2 x} = \frac{1}{256}$
رشیه های معادله را بیابید .

ب) برای وقتی که $x = \log_a^b$ ، $y = \log_a^c$ ، $z = \log_c^a$
و $x + y + z = \frac{31}{6}$ و a ، b و c ۳ عدد مثبت باشند و

حاصل $x^2 + y^2 + z^2$ ، $\log_a^b c + \log_b^c a + \log_c^a b = 12$
را محاسبه کنید .

صفحه ی یک :

۵ کرده یا زدم تجربه

سوال ۳) الف) مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ در رأس A قائمه است

و $A = (3, 1)$, $B = (0, 3)$; مختصات رأس C را بیابید .

ب) مجموع جواب های $\sqrt{5x-6} + \sqrt{7-5x} = 1$ برابر چه عددی است ؟

سوال ۴) الف) نمودار تابع با ضابطه $y = f(x) = 4 + \sqrt[3]{x-3}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید .

ب) فرض کنید نمودار تابع بالا را نسبت به خط $y = x$ قرینه کرده ایم و نمودار حاصل را دو واحد در جهت منفی محور x و ۳ واحد در جهت

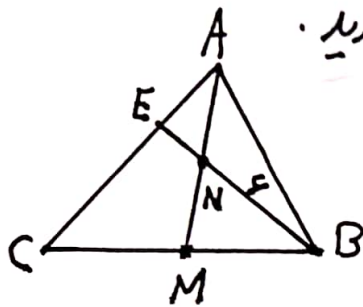
مثبت محور y انتقال داده ایم و آن را $y = g(x)$ نامیده ایم .
اولاً : $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید .

ثانیاً : $g^{-1}(12) = ?$.

صفحه ی دوم

گروه یازدهم تجربی .

سوال ۵) در مثل ABC میانه AM را رسم کرده و نقطه‌ی وسط آن را N می‌نامیم . امتداد یاره خط BN ضلع AC را در نقطه‌ی E قطع می‌کند . اگر $BN = 2$ ، مقدار NE را بدست آورید .



سوال ۶) بارسم نمودار در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ و $g(x) = [x]$ و خود حد را در هر یک در $x=3$ بررسی کنید .

سوال ۷) الف) دامنه و رنج تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - \sqrt{4-x^2}$ را تعیین کنید .

ب) دامنه و رنج تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{\sqrt{\frac{x}{\log_{1/3}(x-4)}}}{[x] + [-x] + 1}$ را تعیین کنید . $[]$ مربوط به علامت خرد صحیح است .

صفحه‌ی نهم

هوانگی ، بیستمین دوره مسابقات ریاضی بنیام (خستواره) ، گروه دهم تجربی ، ریاضی
۱۲۰ دقیقه

سوال ۱) می دانیم برای یک معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ریشه های x_1 و x_2 ، از روش Δ ریشه های آن با فرمول های

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ بدست می آید .}$$

الف) نشان دهید $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ و $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

ب) در معادله ی درجه دوم

$$(3 + 2\sqrt{2})x^2 - (4 + 2\sqrt{3})x + (1 + 2\sqrt{3}) = 0$$

نشان دهید : $\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} = 2$

سوال ۲) فرض کنید $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{3}{2}$ و $\tan^3 \alpha = 3m^2$

الف) با محاسبه و انتخاب مناسب m ، نشان دهید : $\sin \alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + 1}}$ (انتهای α در ناحیه ی سوم مثلثاتی است .)

ب) در تساوی $\frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha - 3 \cot \alpha} = k(1 - \sqrt{10})$ ، k چه عددی است ؟

صفحه ی یک

دوم تجزیه و ریاضی

سوال ۳) الف) عبارت $A = x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3$ را تجزیه کنید.

ب) حاصل عبارت $B = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^9})$ را به ازای $x=2$ محاسبه کنید.

ج) عبارت $c = \sqrt{\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{3 - x}}$ به ازای چند مقدار صحیح x معنی است؟

سوال ۴) برای دو دنباله‌ی حسابی $a_n: -3, 4, 11, \dots$

و $b_n: 2, 7, 12, \dots$

الف) جمله‌ی n ام یا عمومی هر یک را بنویسید. در هر مورد جمله‌ی دهم مقدار است؟

ب) اولین جمله‌ی مشترک دو دنباله را بیابید، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی
جملات مشترک را بنویسید.

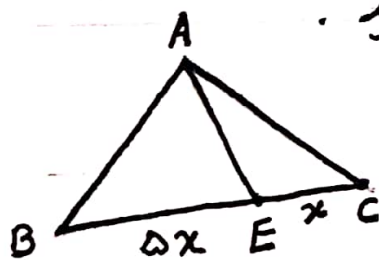
ج) به کمک قیمت ب بنویسید چند جمله‌ی مشترک کمتر از ۲۰۰ داریم.

صفحه دوم

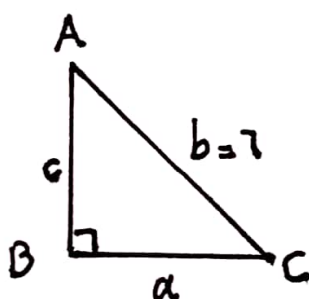
سوال پنجم (الف) نمودار سهمی مربوط به ضابطه ی تابع درجه ی دوم با معادله ی $y = -\frac{1}{2}(x+3)^2 + 4$ را رسم کنید.
مختصات نقطه ی ماکزیم یا مینی هم و معادله محور تقارن این سهمی را بنویسید.
فاصله ی بین دو محل برخورد نمودار با محور x چقدر است؟

ب) در تابع درجه ی دوم با ضابطه ی $y = f(x) = x^2 + ax + 2$ نقطه ی مینی یا ماکزیم روی نمودار تابع روی نیم از ربع سوم قرار دارد؛ مقدار a را بیابید.

سوال ۱) یک شش ضلعی منتظم را در نظر بگیرید به طوری که طول یک ضلع آن 5cm باشد. مساحت آن را محاسبه کنید.



ب) در مثلث روبرو $\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ABC}} = ?$



ج) در مثلث قائم الزاویه ی روبرو $S_{\triangle ABC} = ?$
• $\tan \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

صفحه ی سوم

هواکشی ، مبتنی بر مسابقات ریاضی خنایم (ششواره) باز هم راست

۸۰ دقیقه

سوال یک) با هم جدول ارزش هم ارزی کمی زیر اثبات کنید

$$\text{الف) } (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

$$\text{ب) } \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

سوال ۲) الف) نشان دهید $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow \sim q$ هم ارزند

ب) ثابت کنید اگر n^2 زوج باشد آنگاه n زوج است. $n \in \mathbb{Z}$

سوال ۳) اگر f تابعی ثابت باشد و $m, n \in \mathbb{N}$ مقدار $m+t$ مقدار است؟

$$f = \{(-1, n^2 - 2n), (m-1, 2), (m+n, t)\}$$

سوال ۴) برای تابع $y = \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ که به تابع علامت معروف است

الف) این تابع را رسم کنید
ب) تابع $y = \text{sgn}(x^2 - 1)$ را رسم کنید

سوال ۵) برای وقتی که $f(x) = [x] + [-x] + 1$

$$f(-1) + f\left(\frac{1}{10}\right) + f(-\sqrt{2})$$

اگر $g(x) = \left[\frac{1}{x^2 + 1}\right]$ ، $g(0)$ و $f(1)$ و $f(-1)$ و $f(\sqrt{5})$ را محاسبه کنید ، در مورد این تابع چه نتیجه‌ی خاصی می‌توان گرفت؟

هواکچی ، بیستمین دوره ی مسابقات ریاضی خپام (جشنواره) گروه یازدهم ریاضی
۱۲۰ دقیقه

سوال (الف) فرض کنید p و q اعدادی اولند و معادله ی درجه ی دوم
 $x^2 - px + q = 0$ دارای ریشه های صحیح مثبت می باشد.
در این صورت p و q چه اعدادی می توانند باشند؟

ب) اگر α و β ریشه های معادله ی $x^2 - 3x = 0$ باشند ،
 $\frac{1}{(\alpha+1)^4}$ و $\frac{1}{(\beta+1)^4}$ ریشه های چه معادله ی درجه دوم می باشد؟

سوال (الف) معادله ی $(\sqrt{5} - \sqrt{24})^x + (\sqrt{5} + \sqrt{24})^x = 10$ را حل کنید.

ب) اگر بدانیم در معادله ی $2^x = x^2$ ، یکی از ۳ ریشه ی موجود در
بازه ی $(0, 1)$ قرار دارد ، (بارم) ، این مطلب را نمایش دهید. در ریشه ی
دیگر را بنویسید) آن گاه :

معادله ی $f(x) = g(x)$ را حل کنید وقتی که بدانیم ،
 $f(x) = \log_2(x+2^3) - 5$ ، $g(x) = x^2 + 10x + 2$

خبر صحیح مجموع ۳ ریشه چه عددی است ؟

صفحه ی یک

گروه یازدهم ریاضی

سوال ۳) اگر درستی رابطه ${}^3(\sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{n-1}) < \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} < {}^3(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$ را داشته باشیم، و اگر A را به صورت زیر تعریف کنیم،

$$A = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{64}}$$

آنگاه $[A]$ را بیابید. [علامت گرد صحیح می باشد]

سوال ۴) بردار به چند محاس می توان رسم کرد که این محاس می از نقطه ی A که خارج دایره قرار دارد به فاصله ی d باشد؛ (با رسم شکل بحث کنید)

سوال ۵) $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3^2} - \frac{1}{3^3}) + \dots$ را برابر که $\frac{\alpha}{\beta}$ بنویسید. $\frac{\alpha}{\beta} = ?$

راهنمایی ۱: فرض کنید $a = \frac{1}{2}$ و $b = \frac{1}{3}$ و از اتحاد a و مجموع دنباله ی هندسی استفاده کنید.

راهنمایی ۲:

$$a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r}$$

$$(-1 < r < 1, r \neq 0)$$

صفحه ۲

گروه یازدهم ریاضی

سوال ۳) الف) فرض کنید $x \in [-1, 2]$ و $[x] + [y] = 2$ ، نمودار این رابطه را رسم کنید .

ب) دامنه ی تابع باضابطه ی $y = f(x) = \sqrt{[x]^2 - [x] - 2}$ را تعیین کنید .

سوال ۴) حاصل حد کمی زیر را بدست آورید .

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} - 2}{x^3 + 3x^2 + 2x} \quad \text{الف)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \quad \text{ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} -|\sin x| \quad \text{ج)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{x - 1} \quad \text{د)}$$

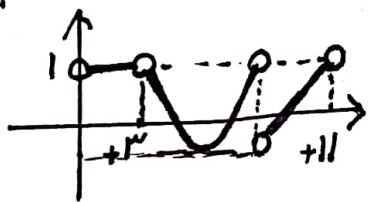
صفحه ی شوم .

هوا نچی ، بیتین دوره ی مسابقات ریاضی خدام (جشنواره) ، دهم ان ۲
 سوال یک: چند عدد ۳ رقمی مانند $\overline{xyz}$ می توان نوشت که در آن $x < y < z$ ۸۰ دقیقه

سوال دو: تابعی خطی و غیر ثابت است مقدار $\frac{f(11) - f(3)}{f(7) - f(5)}$ را بیابید.
 در یک تابع خطی با ضریب های معلوم مقدار کسر را بر بیابید.

سوال ۳: نمودار تابع با ضرایبی $f(x) = |x-3|$ و $g(x) = |x+2| - 3$ را رسم کنید
 و محل های برخورد هر یک را با محور x و y را بدست آورید.

سوال ۴: در شکل روبرو که نمودار تابع f است a, b, m, k را بیابید.
 $0 < x < 3$
 $f(x) = \begin{cases} k & 0 < x < 3 \\ x^2 - 10x + 24 & 3 < x < m \\ ax + b & m < x < 11 \end{cases}$



سوال ۵: $f = \left\{ (x, x^2 - 4), (-y, 12 - y^2), (z, \frac{z^2 + 9}{4}) \right\}$ تابعی هم است.
 دامنه اش ۳ عضوی است x, y, z را بدست آورید.

سوال ۶: معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است ، a را بدست آورید.

یک صفحه