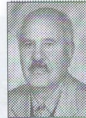




زندگی با ریاضیات



دکتر سید محمود طالبیان

مسئول کمیته علمی خانه ریاضیات نیشابور

ترسیم پذیر

ترسیم پذیر به وسیله ی خط کش و پرگار صحبت می کنیم و بحث ترسیم پذیری به وسیله ی ستاره و پرگار را کنار می گذاریم. برای کسب نتیجه ی مطلوب، کافی است که اعداد مثبت را مد نظر قرار دهیم.

ابتدا مسئله ی زیر را حل می کنیم.

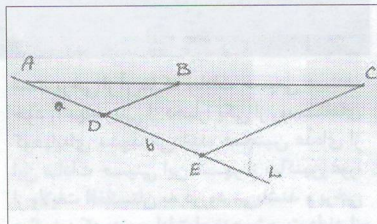
دو عدد a و b مفروض می باشند. پاره خط مفروض AC را به قطعات AB و BC چنان تقسیم کنید که

$$\frac{AB}{a} = \frac{BC}{b}$$

یا

$$\frac{AB}{BC} = \frac{a}{b}$$

حل. خط دلخواهی چون L مار بر A به شکل زیر در نظر بگیرید و بر آن دو قطعه ی AD و DE را، به ترتیب، برابر a و b رسم کنید. سپس، E را به C وصل و از نقطه ی D خطی به موازات EC رسم کنید تا AC را در B قطع کند. در این صورت، به استناد قضیه ی تالس، پاره خط های AB و BC همان دو قطعه ی مطلوب می باشند. حال، فرض کنید که a و b ترسیم پذیر باشند.



نشان می دهیم که $a \times b$ نیز ترسیم پذیر است. حل. دو خط متقاطع مطابق شکل زیر در نظر بگیرید و نقطه ی تقاطع L_1 و L_2 را A بنامید. سپس پاره خط های AB و BC را، به ترتیب، به طول یک واحد و b بر L_1 مشخص کنید. آنگاه، قطعه ی AD را بر L_2 طول a مشخص و از نقطه ی C خطی موازی BD رسم کنید تا L_2 را در نقطه ی E قطع کند. در این صورت، به استناد مسئله ی اول، تساوی

$$\frac{AB}{a} = \frac{BC}{DE}$$

یا

$$\frac{1}{a} = \frac{b}{DE}$$

برقرار است و معلوم می شود که

$$DE = a \times b$$

در یونان باستان (قرن پنجم قبل از میلاد) ریاضیدانان، بویژه شاگردان افلاطون، معتقد بودند که دایره و خط راست کاملترین اشکال هندسی می باشند. خط راست با ستاره یا خط کش رسم می شود و دایره با پرگار. بر این اساس، آنان علاقمند بودند که بدانند که کدامیک از اشکال هندسی قابل ترسیم به کمک ستاره و پرگار است و کدام نیست. آیا اعداد اصمی چون $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ ترسیم پذیرند؟ کدام چند ضلعی منتظم به طریق مذکور ترسیم پذیر است؟

برای پاسخگویی به سؤالات بالا، نخست باید بدانیم که ستاره چیست و چه تفاوتی با خط کش دارد؟ اساساً ستاره به وسیله ای چوبی یا فلزی اطلاق می شود که کناره ای مستقیم داشته باشد به طوری که خطوط راست با آن ترسیم پذیر باشند. پس، در واقع، به هر وسیله ی «راست-لبه» یک ستاره گفته می شود. اما، «خط کش»، ستاره ای است که یک واحد اندازه گیری نیز بر روی آن مشخص شده باشد.

در میان مسائل مذکور، سه مسئله ی زیر نیز مورد توجه خاص یونانیان قدیم بوده است:

۱. تربیع دایره: فرض کنید که یک دایره ی C مفروض است. آیا مربعی می توان ساخت که مساحتش مساوی مساحت دایره ی مفروض C باشد؟

۲. تثلیث زاویه: آیا هر زاویه را می توان به سه قسمت مساوی تقسیم کرد؟

۳. تضعیف مکعب: آیا مکعبی می توان ساخت که حجمش دو برابر حجم یک مکعب مفروض باشد؟

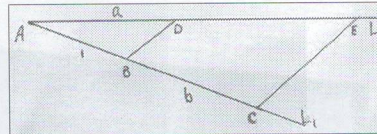
البته صرفاً به کمک ستاره و پرگار! تقریباً دو هزار سال طول کشید تا اینکه به همه ی سؤالات فوق پاسخ مناسب داده شد. لازمه ی درک پاسخ سؤالات فوق الذکر، برخورداری از یک دانش عمیق از جبر (نظریه ی گالوا) و نظریه ی اعداد است و، بنابراین، ذکر جزئیات مسائلی مذکور و حل پذیری یا حل ناپذیری آنها صرفاً به کمک ستاره و پرگار خارج از یک بحث مقدماتی است.

البته، ثابت شده است که مسائل سه گانه ی بالا صرفاً به کمک ستاره و پرگار حل ناپذیرند! و اجالتاً خاطر نشان می کنیم که کارل فردریش گاوس - ریاضیدان شهیر آلمانی - و، همکارانش در اواخر قرن هجدهم و اوایل قرن نوزدهم ویژگی چندضلعی های منتظم ترسیم پذیر را تعیین نمودند.

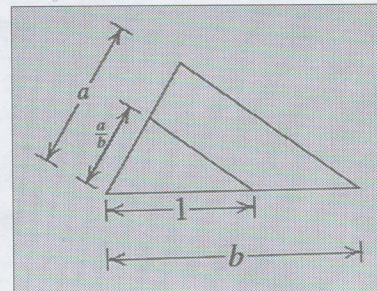
در این یادداشت، مختصری درباره ی اعداد

بری به وسیله ی ستاره، خط کش و پرگار

مثلاً، به وسیله ی ستاره و پرگار ترسیم ناپذیر است؛ ولی، به روش زیر نشان می دهیم که $\sqrt{2}$ با خط کش و پرگار قابل ترسیم است. مثلث قائم الزاویه ی ABE را چنان می سازیم که $AE = \frac{1}{2}$ و $AB = 1$

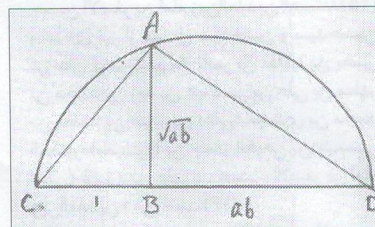


سپس، فرض می کنیم که $b > 1$ و نشان می دهیم که $\frac{a}{b}$ نیز ترسیم پذیر است. حل. در واقع، با عنایت به شیوه ی حل مسئله ی بالا، ترسیم پذیری $\frac{a}{b}$ از روی شکل زیر مشهود است:



سرانجام، نشان می دهیم که $\sqrt{a \times b}$ هم ترسیم پذیر است.

حل. بر روی یک خط L ، قطعات CB و BD را، به ترتیب، به طول های یک واحد و $a \times b$ در نظر بگیریم. آن گاه، دایره ای به قطر CD رسم و از نقطه ی B عمودی بر CD خارج کنید تا مثلث قائم الزاویه ی ACD به دست آید (شکل زیر).



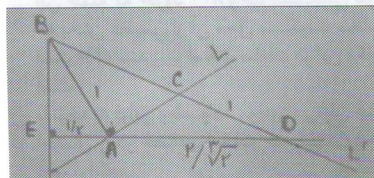
در این صورت، چنان که می دانیم،

$$(AB)^2 = CB \times BD = a \times b$$

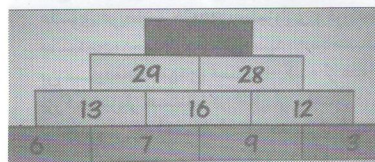
و در می یابیم که AB همان پاره خط مطلوب است.

نتیجه: شرط لازم و کافی برای آن که a ترسیم پذیر باشد آن است که $\sqrt{a}$ ترسیم پذیر باشد. توجه کنید که شرط لازم برای آن که a ترسیم پذیر باشد آن است که a جبری باشد؛ بدین معنی که در یک معادله ی چند جمله ای با ضرایب گویا صدق کند ولی این شرط کافی نیست.

در A، یک عمود L بر AB رسم می کنیم و خط L' را مار بر B طوری رسم می کنیم که L را در C و امتداد EA را در D قطع کند و $CD=1$. در این صورت، با استفاده از تشابه مثلث ها می توان نشان داد که $AD = \frac{1}{\sqrt{2}}$ آشکار است که، به روش مذکور در بالا، $\sqrt{2}$ به دست می آید.



بعلاوه، خاطر نشان می کنیم که عدد π ترسیم پذیر نیست؛ زیرا، π متعالی است نه جبری! معما: آیا می توانید بگویید که عدد واقع در خانه ی بالای هرم زیر چیست؟



جواب معمای شماره ۳۴۴:

