

مفهوم بی نهایت

الف - مفهوم بی نهایت در دستگاه اعداد حقیقی

فرض کنید متحرکی بر روی محور حقیقی از مبدأ به سمت راست با سرعت $v(x) = 5x / (x+1)$ حرکت کند. بعد طول را مترو و در زمان x ثانیه فرض می‌کنیم. محاسبه خواهیم کرد که

سرعت متحرک مذکور وقتی که تدریجاً از مبدأ دور شود به ۵ متر بر ثانیه نزدیک می‌شود.

مثلاً، اگر متحرک ۵ کیلومتر از مبدأ دور شود، سرعتش - که در هر حال کمتر از ۵ متر بر ثانیه است - از ۴٫۹۹۹ متر بر ثانیه بیشتر می‌شود. این واقعیت را بدین صورت بیان می‌کنند

سرعت متحرک مذکور در دور است به ۵ متر بر ثانیه بسیار نزدیک است، یا

سرعت متحرک مذکور وقتی که x به مثبت بی نهایت میل کند تقریباً ۵ متر بر ثانیه خواهد بود.

این گزاره را به شکل زیر می‌نویسند:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 5 \text{ m/s}$$

با این چنین استنباط می‌شود که $+\infty$ یک عدد با این ویژگی است که از هر عدد حقیقی

(۵)

بزرگتر است؛ یعنی، اگر M یک عدد مثبت دلخواه باشد آن‌گاه $M > +\infty$.

اینک، فرض کنید متحرک مذکور حرکت خود را از لحظه $t=0$ در جهت منفی آغاز کند.
این بار نیز سرعت متحرک در حالتی که از مبدأ دور می‌شود تدریجاً به ۰ نزدیک می‌شود و خواهد شد

این وضعیت را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

سرعت متحرک مذکور وقتی که x به منفی بی‌نهایت میل کند تقریباً ۰ می‌شود

خواهد بود؛ و آن را با نمادهای ریاضی به شکل زیر می‌نویسند:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = 0 \text{ m/s}$$

«این مورد، $-\infty$ نام یک نماد به این خاصیت است که از هر عدد منفی بزرگتر است؛

یعنی، اگر m یک عدد منفی دلخواه باشد آن‌گاه $-\infty < m$ ، به این دلیل است که

مجموعه حقیقی را به صورت

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

نمایش می‌دهد. از این رو، اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد آن‌گاه $-\infty < x < +\infty$

نتیجه: $-\infty$ و $+\infty$ دو نمادند که به مجموعه‌ی اعداد حقیقی اضافه شده‌اند تا این خاصیت که

(۴)

و از این دو در هر جهت که از مبدأ در شوم به بی نهایت نزدیک می شویم.

برای درک بهتر مفهوم نقطه بی نهایت در هندسه تحلیلی، یک سطره بی قند و نمی را
در نظر مجسم و آن را جمع کنید. این سطره قند پس از این که جمع شد به شکل یک انار در می آید
و حفظ می کنیم که هر سطره بی قند در یک نقطه فشرده می شود و آن کل انار یا همان قطب
شمار است و خود انار همان کره است که ما مطرح کرده بودیم.

mathematics home, 11

عبدالله

این تصور است از بی نهایت با پیرستایی قابل ترجمه است.

نزدیک می شود
محور حقیقی در دو جهت به بی نهایت ~~و~~ در جهت مثبت به مثبت بی نهایت،

در جهت منفی به منفی بی نهایت؛ و هرگاه در هندسه از مبدأ در شوم در هر جهت

که به حرکت در آئیم به نقطه بی نهایت نزدیک می شویم.

مختصر فرم

نقطه بی نهایت، $+\infty$ و $-\infty$ مختصر به فردند؛ و در هندسه، نقطه بی نهایت

(9)

1	2	3	...	n	...
2	4	6		2n	...

اینک، مجموعه اعداد صحیح را به $\mathbb{Z}$ نشان می دهیم:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

تابع f را از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{Z}$ به ضابطه

$$f(n) = \frac{1}{2}n, \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}$$

$$= \frac{1-n}{2}, \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد}$$

تعریف می کنیم: به آسانی و با حال تعجب درمی یابیم که تابع f یک تناظر یک به یک بین

$\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ برقرار می کند، به نظر نرسد:

$f:$	1	2	3	4	5	6	...
	0	1	-1	2	-2	3	...

پس، کار دینال $\mathbb{N}$ با کار دینال $\mathbb{Z}$ غیر ملکی است.

حال، اگر m/n را در نظر بگیریم در تحول باید برآید و صورت و مخزنش اعداد طبیعی باشد.

مقطع کند تابع

$$m/n \rightarrow r^m (rn-1)$$

یک تناظر یک به یک بین مجموعه‌ی اعداد m/n و مجموعه‌ی اعداد $\mathbb{Q}$ برقرار می‌کند.

به این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌ی اعداد گویا $\mathbb{Q}$ نشان دهنده‌ی دهم است.

با $\mathbb{Q}$ هم ارز است؛ یعنی، کار دینال $\mathbb{Q}$ با کار دینال $\mathbb{N}$ برابر است.

هر عدد حقیقی را که می‌توانیم بنویسیم یک عدد دهم می‌نامند. مثلاً، $\sqrt{2}$ یک عدد دهم است.

$\sqrt{3}$ هم دهم است.

عدد دهم منتهی را بهتر می‌نامند در صورتی که در یک معادله‌ی چند جمله‌ای $P(x)$ قرار می‌گیرد.

هر وقت می‌کند.

اعداد $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، دهم می‌باشند. مثلاً $\sqrt{2}$ در معادله‌ی $x^2 - 2 = 0$ قرار می‌گیرد.

هر عدد دهم را که بهتر می‌توانیم بنویسیم یک عدد دهم متناهی می‌نامند.

مثلاً π و e دهم متناهی می‌باشند.

حال، فرض کنید A مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی باشد. در این صورت، $\mathbb{R} - A$

مجموعه‌ی اعداد متناهی است. کار دینال $\mathbb{N}$ را به $\mathbb{N}_0$ نشان می‌دهیم و کار دینال

$\mathbb{R}$ را به c تدبیر کنید. $\mathbb{N}_0$ نشان می‌دهد c هم نشان می‌دهد. به عبارت دیگر،

$\mathbb{N}_0$ ، c اعداد متناهی نیستند. مثلاً $\sqrt{2}$ و $c = 2$ و $\mathbb{N}_0 < c$ و $\mathbb{N}_0 \neq c$.

یعنی، مجموعه اعداد مهم متناهی هم ارزش مجموعه اعداد حقیقی است. به عبارت دیگر، اکثریت قریب به اتفاق اعداد حقیقی را اعداد مهم متناهی تشکیل می دهند که ما با محدودی از آنها مانند π و e آشنایی داریم. بهر حال، کار دنیال R از کار دنیال $\mathbb{R}$ بزرگتر است. یعنی، در عدد نامتناهی می توانیم که می بزرگتر از دیگری است. باور کردنی نیست؛ ولی از لحاظ نظری ریاضی خالی از ابراد است!

پس بگو: عموماً اعتقاد بر این است که: کل بزرگتر از جزء است.

آیا شما هم بر این باورید؟ بر چه دلیل؟
اگر دلیل مانع کننده ای نمی یابید، متن بالا را یک بار دیگر مطالعه فرمایید.