



زندگی با ریاضیات

دکتر سید محمود طالبیان

معاون کمیته علمی خانه ریاضیات نیلوفر



ساختمان ساعت‌های آبی

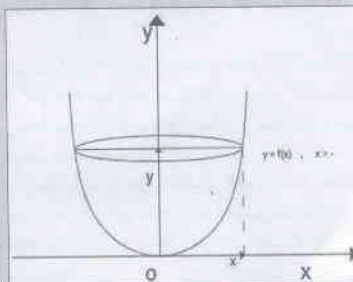
ساعت آبی که در آن گذشت زمان با شارش آب از ته یک ظرف اندازه‌گیری می‌شود در دوران باستان در میان مصریان، یونانیان و رومیها رواج داشته است.

اصطلاح «clepsydra» به معنی «ظرف آب» است. یک ساعت آبی قدیمی از یک ظرف سفالی ساخته شده است که سوراخی در ته ظرف برای خروج آب تعبیه شده است. قدیمی‌ترین ساعت آبی که اکنون در موزه‌ی علوم لندن موجود است، متعلق به مصر علیا است که تقریباً ۱۴۰۰ سال قبل از میلاد ساخته شده است. ساعت‌های آبی عموماً برای تعیین زمان سخنرانی در دانشگاه‌ها و در سنای روم به کار می‌رفته است تا مدت زمان دفاعیه یا نطق حضار در جلسه یکسان یا معین باشد. تدریجاً بر اساس نیاز، ساعت‌های آبی ساخته شد که قادر بودند طول روز یا طول شب یا طول شبانه روز را اندازه‌گیری نمایند.

نکته‌ی اساسی در ساخت ساعت‌های آبی این است که ساختار بدنه‌ی ساعت باید چنان باشد که نرخ خروج آب از سوراخ ته ظرف ساعت آبی همواره ثابت بماند.

بدیهی است که با خروج تدریجی آب از ظرف و کاهش سطح آب درون ظرف، فشار ناشی از وزن آب درون ظرف نیز کاهش می‌یابد و زمان خروج آب کند می‌شود. پس، ساختار بدنه‌ی ساعت آبی باید چنان باشد که نرخ نزول سطح آب ظرف در زمان‌های ثابت یکسان باشد.

بدیهی است که ظروف مورد استفاده معمولاً مندرج در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، فرض می‌کنیم که ظرف مطلوب ما از دوران منحنی $y=f(x)$ حول محور y ها به دست آمده باشد. شکل زیر را ملاحظه کنید.



با عنایت به توضیحات بالا، اگر y عمق آب در لحظه‌ی t باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{dy}{dt} = c$$

که در آن c یک ثابت مثبت است. برای سهولت بحث، تابع f را اکیداً صعودی در نظر می‌گیریم. چنان که می‌دانیم، حجم آب درون ظرف از دستور زیر به دست می‌آید:

$$V = \int_0^y \pi x^2 dy$$

اما، $y=f(x)$ و فرض یکنواپی f ایجاب می‌کند که f معکوس پذیر باشد. از این رو، در می‌یابیم که $x=f^{-1}(y)$ ، پس، خواهیم داشت:

$$V = \int_0^y \pi [f^{-1}(y)]^2 dy$$

از قضیه‌ی اساسی حساب انتگرال فوراً نتیجه می‌شود که

$$\frac{dV}{dy} = \pi [f^{-1}(y)]^2$$

از طرف دیگر، به موجب قاعده‌ی زنجیری،

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$$

اما، اگر نیروی وارد بر آب فقط نیروی حاصل از گرانش زمین باشد، مطابق قانون توریچلی، خواهیم داشت:

$$\frac{dV}{dt} = \sqrt{2gy}$$

از معادلات (۱)، (۲) و (۳)، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\sqrt{2gy} = \pi [f^{-1}(y)]^2 \cdot c$$

$$f^{-1}(y) = \frac{(2gy)^{1/4}}{\sqrt{\pi c}}$$

که، از آن، با جایگزینی،

$$y = f(x) \text{ و } x = f^{-1}(y)$$

تابع مطلوب f به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$f(x) = ax^4$$

$$a = \frac{(c\pi)^2}{2g}$$

بنابراین، ظرف ساعت آبی یک سهمیگون است که از دوران سهمی به معادله‌ی (۴) حاصل می‌شود.

توجه کنید که معادله‌ی (۳) از تساوی انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$mgy = \frac{mv^2}{2} \text{ - انرژی جنبشی}$$

بعلاوه، شعاع سوراخ ته ظرف ساعت آبی را می‌توان چنان اختیار کرد که مثلاً مدت زمان کاهش یک سانتی متری سطح آب برابر عدد منتخب مفروضی، مثلاً یک ساعت، باشد. راهنمایی: اعداد، بعد از ۱۲ تکرار می‌شوند (تعیین وقت از روی ساعت).

جواب معمای شماره‌ی قبل: عدد ۵.

معمای ستون سمت راست

ساختمان ساعت‌های آبی

معمای با توجه به جدول زیر، عدد داخل خانه‌ی خالی را بیابید.

+	3	8	11
3	6	11	2
8	11	4	7
11	2	7	