دکتر سید محمود طالبیان
مسئول کمیته علمی خانه ریاضیات نیشابور

اعداد اول، زیبا ولی سرکش

اعداد اول : زیبا ولی سرکش

علم اعداد و بررسی خواص آنها را نظریه ی اعداد نامیده اند. از نقطه نظر ریاضی، هر نظریه، مجموعه ای است متشکل از

الف - مفاهیم اولیه

ب - اصل موضوع

ج - قضایا و مفاهیم جدید

• مفاهیم اولیه، تعریف نا پذیرند. مثلا، نقطه و خط از مفاهیم اولیه ی هندسه اند و عدد در نظریه ی اعداد یک مفهوم اولیه است که بدون تعریف پذیرفته می شود. تلاش برای تعریف نقطه و خط درهندسه و عدد در نظریه ی اعداد، تلاشی بیهوده است .

علاوه بر مفهوم عدد، مفاهیم « ۰» و « ۱» نیز از مفاهیم اولیه اند.

• اصول موضوع هر نظریه، گزاره هایی هستند که درستی آنها مفروض گرفته می شود.

مثلا در هندسه ی اقلیدسی، اصل توازی که شکل ساده ای از آن را ذیلا ملاحظه می کنید، یک اصل موضوع است :

اصل توازی در هندسه ی اقلیدسی : از هر نقطه واقع در خارج یک خط مفروض، یک و فقط یک خط می توان به موازات خط مفروض رسم نمود.

اصول موضوع نظریه ی اعداد، همان اصول موضوعی هستند که دستگاه اعداد حقیقی بر آن بنا شده است . مثلا به عنوان یک اصل موضوع می پذیریم که :

هر گاه a یک عدد حقیقی باشد آن گاه تساوی $a=a+0=0+a$ برقرار است .

تعویض پذیری عمل جمع در میان اعداد حقیقی نیز یک اصل موضوع است. بنابراین، پذیرفته ایم که :

هر گاه a و b دو عدد حقیقی باشند آن گاه $a+b=b+a$

• قضایا در هر نظریه، گزاره هایی هستند که درستی آن ها (بر اساس قوانین منطق ریاضی و به استناد اصول موضوع نظریه یا گزاره هایی که قبلا درستی آن ها معلوم شده است) محرز شده باشد .

توجه کنید که نظریه ای معتبر است که سازگار باشد و نظریه ای سازگار است که عاری از تناقض باشد.

با عنایت به مقدمات مذکور، بحث خود را از دستگاه اعداد حقیقی آغاز می کنیم که در آن دو عدد ۰ و ۱ تعریف شده اند که در اصول معینی صدق می کنند سپس با تعریف اعداد

۲=۱+۱   ۳=۲+۱   ۴=۳+۱   ...

مجموعه ی اعداد طبیعی مشخص می شوند. بررسی خواص اعداد طبیعی را با تعریف مفهوم بخش پذیری شروع می کنیم.

تعریف. فرض کنید که a و b دو عدد طبیعی باشند a را بر b بخش پذیر می نامیم در صورتی که یک عدد طبیعی q بتوان یافت به طوری که $a=bq$.

پس از آن، اعداد اول به صورت زیر تعریف می شوند :

عدد طبیعی و بزرگتر از واحد p را یک عدد اول می نامیم در صورتی که p فقط بر یک و خود بخش پذیر باشد .

هر عدد طبیعی و بزرگتر از واحد را که اول نباشد یک عدد مرکب می نامیم .

بنابراین ،مثلا ۳ اول است و ۴ مرکب .

برای سادگی بحث ،فرض کنید که a و b دو عدد طبیعی باشند.b را یک عامل a می نامیم.

در صورتی که a بر b بخش پذیر باشد .

از تعاریف بالا بلافاصله نتیجه می شود که هر عدد مرکب حداقل یک عامل اول دارد. در واقع، کوچکترین عامل بزرگتر تر از واحد هر عدد مرکب یک عدد اول است. مثلا ۲ یک عامل اول ۴ است. در این مقام، می توان ثابت کرد که

قضیه : مجموعه ی اعداد اول نامتناهی است.

اقلیدس چنین استدلال کرده است :

فرض کنید (فرض خلف)که مجموعه ی اعداد اول یک مجموعه ی متناهی باشد و فقط اعداد $p_1, p_n, \ldots, p_2$ اول باشند. آن گاه عدد $p_n \ldots p_2+p_1+1=N$ را در نظر می گیریم.N بزرگتر از واحد است و حداقل یک عامل اول دارد . فرض کنید که p این عامل اول N باشد ، معلوم است که p با هیچ یک از اعداد $p_1, p_n, \ldots p_2$ برابر نیست پس p در مجموعه متشکل از $p_1, p_n, \ldots p_2$ عضویت ندارد .چون به تناقض رسیدیم، نتیجه می گیریم که فرض خلف، که باعث ایجاد تناقض شده است، باطل است .

چگونه تشخیص دهیم که عدد طبیعی و بزرگتر از واحد مفروضی یک عدد اول هست یا خیر.

باید اعتراف کنیم که هیچ دستور العمل کلی برای تحقق مقصود مذکور وجود ندارد. به علاوه از نحوه ی توزیع اعداد اول در میان اعداد طبیعی نیز آگاهی قابل ملاحظه ای نداریم . در عین حال، فرض کنید که N یک عدد طبیعی بزرگتر از واحد باشد. اگر N نسبتا کوچک باشد، تشخیص اعداد اول از مجموعه ی اعداد ۲,۳,...,N کار آسانی است. مثلا فرض کنید که بخواهیم اعداد اول کوچکتر از ۵۰ را شناسایی کنیم .اعداد طبیعی۲،۳،... ۵۰ را به صورت زیر می نویسیم .

و به روش زیر، که منسوب به «اراتستن» است و آن را غربال اراتستن نامیده اند، عمل می کنیم.

۲ اول است. سایر مضارب ۲ را خط می زنیم .کوچکترین عدد باقیمانده عدد ۳ و اول است.

سایر مضارب ۳ را خط می زنیم .کوچکترین عدد باقیمانده عدد ۵ و اول است. سایر مضارب ۵ را خط می زنیم. کوچکترین عدد باقیمانده عدد ۷ و اول است. سایر مضارب ۷ را خط می زنیم. و چون جذر ۴۹ برابر ۷ است، غربال در این مرحله تمام می شود و کلیه ی اعداد باقیمانده از این غربال، اعداد اول می باشند .

درس نظریه ی اعداد به همین سادگی و زیبایی است و تاثیری که تحصیل و مطالعه ی آن بر افزایش فعالیت و خلاقیت ذهنی متعلم دارد انکار ناپذیر است اما در عین حال در آن با مسائلی روبه رو می شویم که بشر تا کنون بر آنها فائق نیامده است. مثلا توجه کنید که هر عدد از ازواج ۲و ۳، ۳و۵، ۵و۷، ۱۱و ۱۳، ۱۷ و۱۹، ۲۹و۳۱،... یک عدد اول است. به همین دلیل، ازواج مذکور را دوقلوهای اول نامیده اند. حال، می پرسیم آیا مجموعه ی دوقلوهای اول متناهی است یا نامتناهی؟ این سوال تاکنون بی پاسخ مانده است.

به عنوان مثالی دیگر، ملاحظه کنید که ۶=۳+۳، ۸=۵+۳، ۱۰=۵+۵=۷+۳، ۱۲=۷+۵، ...

بنابراین، حدس می زنیم که هر عدد زوج ناکمتر از ۶ قابل نمایش به صورت حاصل جمع دو عدد اول باشد .

در واقع گلد باخ در سال ۱۷۴۲به این نکته توجه کرد و حدس مذکور را در نامه ای به اویلر اطلاع داد ولی صحت و سقم آن تاکنون ثابت نشده است مثلا تا سال ۱۹۸۴به کمک رایانه نشان داده شده است که حدس گلدباخ برای اعداد زوج ناکمتر از ۶ و نابیشتر از۱۰۸ درست است .

توجه کنید که جوایزی با واحد میلیون دلار برای پاسخگویی به حدس گلد باخ در نظر گرفته شده است ولی تاکنون نصیب کسی نشده است.

به این دلیل، بعضی حدس مذکور را با اصل عدم کمال گودل مرتبط می دانند. گودل ریاضیدان و منطق دان شهیر آلمانی نشان داد که: در دستگاه اعداد حقیقی، به گزاره هایی برخورد خواهیم کرد که بر اساس اصول موضوع این دستگاه، نه قابل اثبات می باشند و نه قابل رد .

بنابراین، حدس میزنیم ! که حدس گلدباخ یکی از آنهاست .

تمرین ۱ . نشان دهید که مجموعه ی اعداد اول به صورت $4k-1$ نامتناهی است .

تمرین ۲. آیا میدانید که عدد ۱۰۰*۹۹*...*۳*۲*۱ = !۱۰۰ به چند صفر ختم می شود ؟

پاسخ تمرین قبلی در شماره ۳۳۲، رنگ زرد می باشد.

	۲	۳	~~۴~~	۵	~~۶~~	۷	~~۸~~	~~۹~~	~~۱۰~~
۱۱	~~۱۲~~	۱۳	~~۱۴~~	~~۱۵~~	~~۱۶~~	۱۷	~~۱۸~~	۱۹	~~۲۰~~
~~۲۱~~	~~۲۲~~	۲۳	~~۲۴~~	~~۲۵~~	~~۲۶~~	~~۲۷~~	~~۲۸~~	۲۹	~~۳۰~~
۳۱	~~۳۲~~	~~۳۳~~	~~۳۴~~	~~۳۵~~	~~۳۶~~	۳۷	~~۳۸~~	~~۳۹~~	~~۴۰~~
۴۱	~~۴۲~~	۴۳	~~۴۴~~	~~۴۵~~	~~۴۶~~	۴۷	~~۴۸~~	~~۴۹~~	~~۵۰~~