پاسخنامه سوم ریاضی

دانش آموزان عزیز هر گونه سوال و یا انتقادی راجع به طراحی سوالات یا جواب ها را میتوانند از روش های زیر با ما در میان بگذارند

Tel: ۰۹۱۵۱۵۰۸۴۶۸
Telegram: @alijafaree
Instagram: jafareeali

۱ مسابقه خیام

* پاسخنامه سؤالات ریاضی *

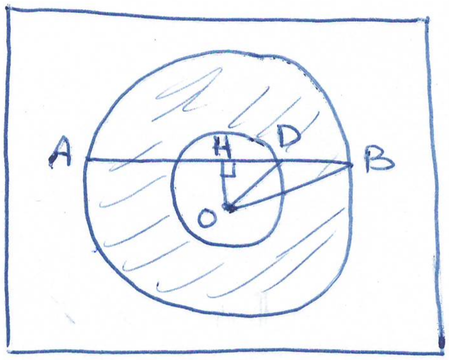
سؤال اول :

۱۵ الف) روش اول

$$x^۴-۲۷x^۲+۱۲۱=\underline{\underline{x^۴}}-۴۹x^۲+\underline{\underline{۲۲x^۲}}+\underline{\underline{۱۲۱}}=$$

$$=(x^۲+۱۱)^۲-۴۹x^۲=(x^۲-۷x+۱۱)(x^۲+۷x+۱۱)$$

روش دوم در پاسخنامه تجربی



۱۵ ب)

$$\begin{cases} ① & OH^۲+HD^۲=r^۲ \\ ② & OH^۲+HB^۲=R^۲ \end{cases} \Longrightarrow$$

با تفاضل رابطه ② از رابطه ① داریم :

$$HB^۲-HD^۲=R^۲-r^۲\Longrightarrow ۱۴^۲-۹^۲=R^۲-r^۲=۱۹۶-۸۱=۱۱۵\Longrightarrow$$

$$P=\frac{S(\text{هاشور})}{S(\text{مربع})}=\frac{۱۱۵\pi}{۲۵۰۰}$$

سؤال دوم:

الف) ۱۵

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰ \Longrightarrow \sin\frac{A}{۲}\,\sin\frac{B}{۲}\,\sin C/۲ \leq \frac{۱}{۴}$$

فرض می‌کنیم که $\hat{C}$ کوچکترین زاویه مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ باشد $\Longleftarrow$ $\hat{C}\leq ۶۰$

$$A+B+C=۱۸۰ \Longrightarrow A=۱۸۰-B-C \Longrightarrow \frac{A}{۲}=۹۰-\frac{B}{۲}-C/۲ \Longrightarrow$$

$$\frac{A}{۲}\leq ۹۰-\frac{B}{۲} \xRightarrow{\sin} \sin\frac{A}{۲} \leq \sin(۹۰-\frac{B}{۲})=\cos\frac{B}{۲} \Longrightarrow$$

$$\xRightarrow{\times \sin B/۲} \sin A/۲\,\sin B/۲ \leq \sin\frac{B}{۲}\cos\frac{B}{۲} \Longrightarrow$$

$$\sin A/۲\,\sin B/۲ \leq \frac{۱}{۲}\sin B \xRightarrow{\sin B\leq ۱} \sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲} \leq \frac{۱}{۲} \quad ①$$

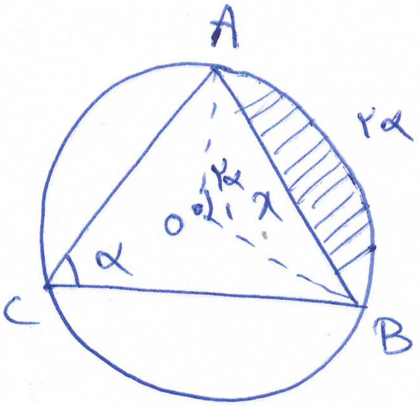
$$\hat{C}\leq ۶۰ \Longrightarrow \frac{\hat{C}}{۲}\leq ۳۰ \Longrightarrow \sin C/۲ \leq \sin ۳۰ \leq \frac{۱}{۲} \quad ②$$

$$① \times ② \Longrightarrow \sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\,\sin\frac{C}{۲} \leq ۱/۲ \times \frac{۱}{۲} \Longrightarrow$$

$$\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\,\sin C/۲ \leq \boxed{\frac{۱}{۴}}$$

۳

سؤال ترم ب) ۱۵



$$R = \frac{AB}{۲\sin\alpha} \xrightarrow{R=۱} AB = x$$

$$۱ = \frac{x}{۲\sin\alpha} \Longrightarrow x = ۲\sin\alpha \Longrightarrow$$

$$\frac{x}{۲} = \sin\alpha \Longrightarrow \alpha = \sin^{-۱}\left(\frac{x}{۲}\right)$$

زاویه مرکزی $\hat{O}_۱ = ۲\alpha \Longrightarrow S = \underbrace{\frac{۱}{۲}(۱)^۲(۲\alpha)}_{\text{مساحت ⌔ OAB}} - \underbrace{\frac{۱}{۲}(۱)^۲\sin ۲\alpha}_{\text{مساحت مثلث } \overset{\Delta}{OAB}} =$

$$\frac{۱}{۲}(۲\alpha - \sin ۲\alpha) \Longrightarrow \frac{dS}{dx} = \frac{dS}{d\alpha} \times \frac{d\alpha}{dx} =$$

$$\cancel{\frac{۱}{۲}}(۲ - ۲\cos ۲\alpha) \times \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۱ - \frac{x^۲}{۴}}} = (۲ - ۲\cos ۲\alpha) \times \frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲}}$$

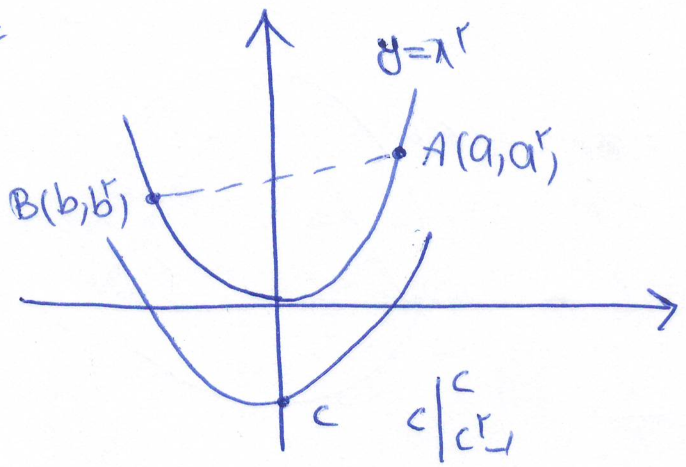
$$\sin\alpha = \frac{x}{۲} \Longrightarrow \cos ۲\alpha = ۲\sin^۲\alpha - ۱ = ۲\left(\frac{x^۲}{۴}\right) - ۱ = \frac{x^۲}{۲} - ۱$$

$$\Longrightarrow ۲ - ۲\cos ۲\alpha = ۲ - ۲\left(\frac{x^۲}{۲} - ۱\right) = ۲ - x^۲ + ۲) = ۴ - x^۲ \Longrightarrow$$

$$\frac{dS}{dx} = (۴ - x^۲)\left(\frac{۲}{\sqrt{۴ - x^۲}}\right) = ۲\sqrt{۴ - x^۲}$$

$\underline{\underline{۴}}$

سؤال سوم: الف) ۲۰



$$y=x^۲$$

AC مماس $\Longrightarrow y'=۲x \Longrightarrow$ شیب AC $=۲a \Longrightarrow y-a^۲=۲a(x-a)$ معادله AC

BC مماس $\Longrightarrow y'=۲x \Longrightarrow$ شیب BC $=۲b \Longrightarrow y-b^۲=۲b(x-b)$ معادله BC

AC, BC تقاطع دو خط $\Longrightarrow a^۲+۲ax-۲a^۲=b^۲+۲bx-۲b^۲ \Longrightarrow$

$$۲ax-۲bx=a^۲-b^۲ \Longrightarrow x=\frac{\cancel{(a-b)}(a+b)}{۲\cancel{(a-b)}}=\frac{a+b}{۲} \Longrightarrow$$

AC, BC تلاقی $\Longrightarrow y=a^۲+۲ax-۲a^۲=۲a\left(\frac{a+b}{۲}\right)-۲a^۲+a^۲=$

$$\boxed{x_C=\frac{a+b}{۲}} \qquad a^۲+ab-a^۲=ab \Longrightarrow \boxed{y_C=ab}$$

AB معادله خط $\Longrightarrow y-a^۲=\frac{b^۲-a^۲}{b-a}(x-a) \Longrightarrow y-a^۲=(b+a)(x-a)$

معادله خط AB

$$y-(b+a)x+ab=۰ \Longrightarrow$$

ارتفاع وارد بر AB $=CH=\dfrac{\left|-(b+a)\left(\frac{a+b}{۲}\right)+ab+ab\right|}{\sqrt{(a+b)^۲+۱}}=$

$$\frac{\left|\frac{-a^۲-b^۲-۲ab}{۲}+۲ab\right|}{\sqrt{۱+(a+b)^۲}}=\frac{|a-b|^۲}{۲\sqrt{۱+(a+b)^۲}}$$ ، طول $AB=\sqrt{(b^۲-a^۲)^۲+(b-a)^۲}$

$$=|b-a|\sqrt{(a+b)^۲+۱} \Longrightarrow S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}CH\times AB=\frac{۱}{۲}\times\frac{|a-b|^۲}{۲\sqrt{۱+(a+b)^۲}}\times$$

$$|a-b|\sqrt{۱+(a+b)^۲}=\frac{۱}{۴}|a-b|^۳$$

⑤

شگل سیستم ع ب) ۱۵

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{c} \Longrightarrow$$

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{\cancel{c}-a-b-\cancel{c}}{c(a+b+c)} \Rightarrow \frac{a+b}{ab}=-\frac{a+b}{(a+b+c)c}$$

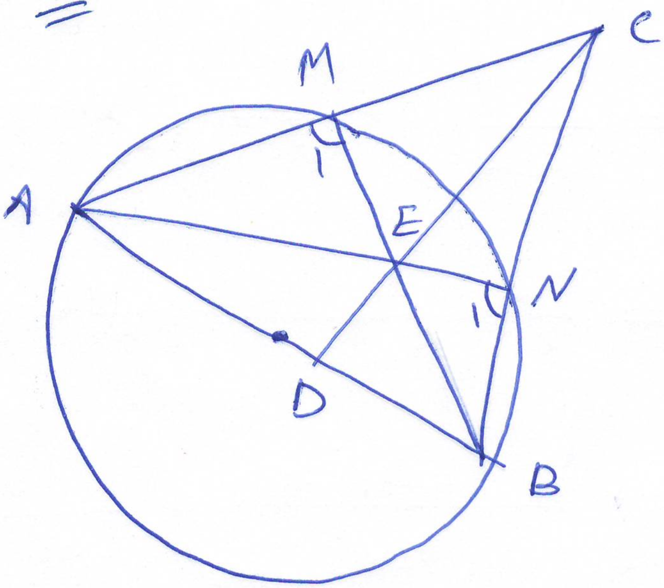
① $\left. a+b=۰ \Rightarrow a=-b \right] \Longrightarrow$

$$\frac{1}{a^{۲۰۱۷}}+\frac{1}{-a^{۲۰۱۷}}+\frac{1}{c^{۲۰۱۷}}=\frac{1}{(۰+c)^{۲۰۱۷}} \quad ✓$$

② $a+b\neq ۰ \Longrightarrow -ab=(a+b+c)c \Rightarrow c^{۲}+(a+b)c+ab=۰$

$$\Longrightarrow (c+a)(c+b)=۰ \Longrightarrow \begin{cases} c+a=۰ \Rightarrow c=-a \\ c+b=۰ \Rightarrow c=-b \end{cases}$$

سئوال چهارم الف) ۱۰



$\hat{M}_1 = \hat{N}_1 =$ محاطی روبه قطر $= \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰ \Longrightarrow \overset{\triangle}{ABC}$

در مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ ، E محل برخورد تلاقی دو ارتفاع خواهد بود ، پس E بر روی ارتفاع DC قرار دارد .

$AB \perp DC$

۷

سؤال چهارم الف ۱۰

با برهان خلف فرض می کنیم دایره از نقاط A و B بگذرد ولی در نقطه T بر دایره مماس نشود پس دایره در نقطه دیگری مانند T' بر خط MT' مماس خواهد شد داریم :

$$\left.\begin{array}{l} MT'^2 = MA \times MB \\ MT^2 = MA \times MB \end{array}\right\} \Longrightarrow MT^2 = MT'^2 \Longrightarrow MT = MT'$$

سئوال پنجم الف)

$$(1+x)^n = 1+nx+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

$$(1-x)^n = 1-nx+\binom{n}{2}x^2-\binom{n}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n$$

$$\Longrightarrow (1+x)^n-(1-x)^n = 2\left(nx+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{5}x^5+\cdots\right)$$

$$x\geqslant 0 \Longrightarrow (1+x)^n-(1-x)^n-2nx\geqslant 0 \xrightarrow[x=\frac{1}{2n}]{}$$

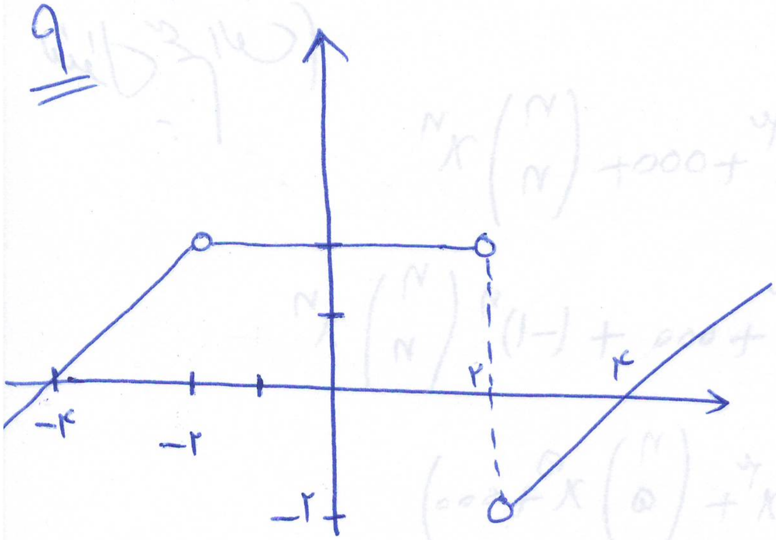
$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n-1\geqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{(2n+1)^n}{(2n)^n}-\frac{(2n-1)^n}{(2n)^n}\geqslant 1 \Longrightarrow (2n+1)^n-(2n-1)^n\geqslant(2n)^n$$

$$\Longrightarrow (2n+1)^n\geqslant(2n-1)^n+(2n)^n$$

۹

سؤال پنجم ب ۱) ۵



$x-2 \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow [-4,2) \cup [4,+\infty) \cap$

$\searrow x \geq 2 \qquad [2,+\infty) \qquad \Rightarrow D_g = [4,+\infty)$

$x-2 \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow (-\infty,-4] \cup (2,4] \cap$

$\searrow x \leq 2 \qquad (-\infty,2) \qquad \Rightarrow D_g = (-\infty,-4]$

$R_g = \mathbb{R}$

سؤال پنجم ب ۲) با توجه به شکل

۱۰/۱

سئوال ششم الف) ۱۵

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt{x}+\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt{x}+1-1+\sin\pi x}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[5]{x}-1}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x-1}+\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi-\pi x)}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\overset{(x-1)}{\cancel{(\sqrt[5]{x}-1)}}\cancel{(\sqrt[5]{x^4}}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1)}{\cancel{(x-1)}(\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1)}+\lim_{x\to 1}\frac{\overset{1-x}{\cancel{(1-\sqrt{x})}}(1+\sqrt{x})}{(x-1)(1+\sqrt{x})}+$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\pi\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}=\lim\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1}-$$

$$-\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}+\lim_{x\to 1}\frac{\pi\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}=\frac{1}{5}-\frac{1}{2}-\pi=\frac{2-5}{10}-\pi=$$

$$\boxed{-\frac{3}{10}-\pi}$$

۱۱

$\sin(\mathrm{tg}^{-1}x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ $\quad -۱ ,(x \le ۱$ سئوال ششم ب : ۱۵

عکس

$\mathrm{tg}^{-1}x=K \Rightarrow \mathrm{tg}K=x \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲K}=۱+\mathrm{tg}^۲K \Rightarrow$

$\cos^۲K=\frac{۱}{۱+\mathrm{tg}^۲K}=\frac{۱}{۱+x^۲} \Rightarrow \sin^۲K=۱-\cos^۲K=۱-\frac{۱}{۱+x^۲}=$

$\frac{x^۲}{۱+x^۲} \Rightarrow \sin K=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \Rightarrow \sin(\mathrm{tg}^{-1}x)=\frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$

$۱۳۹۶, ۱۳۹۳, \cdots, ۱$ سئوال ششم ج : ۲۰

جمع مربعها $=۱۳۹۶^۲+۱۳۹۳^۲+\cdots+۴^۲+۱^۲=$

$۱+(۱+۳)^۲+(۱+۳\times۲)^۲+\cdots+(۱+۳\times۴۶۶)^۲=$

$۴۶۷+۳^۲(۱+۲^۲+۳^۲+\cdots+۴۶۶^۲)+۳\times۲(۱+۲+\cdots+۴۶۶)=$

$۴۶۷+۹\times\frac{۴۶۶\times۴۶۷\times(۹۳۲+۱)}{۶}+\frac{۳\times۲\times۴۶۵\times۴۶۶}{۲}$