

به نام خدا

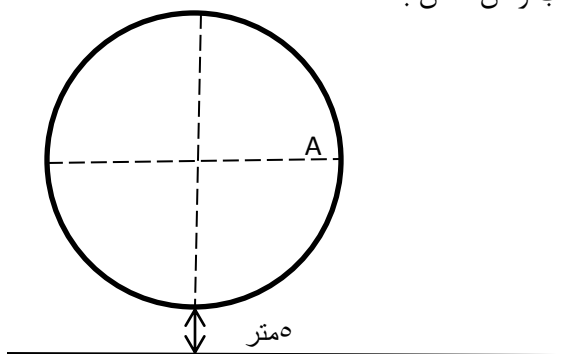
یازدهمین دوره مسابقات ریاضی بزرگداشت حکیم عمر خیام نیشابوری

اردیبهشت ماه ۱۳۹۳ - پایه دوم

۱- چرخ و فلک زیر در هر ۳ دقیقه یک دور می زند و دارای ۲۴ کابین است که در خلاف جهت عقربه های ساعت پیاپی شماره گذاری شده اند، ولی چرخ و فلک در جهت حرکت عقربه ای ساعت می چرخد. شعاع چرخ متر است و به فاصله نیم متری زمین نصب شده است. فرض کنید که مرکز چرخ بر مبدأ مختصات منطبق باشد. با مفروضات فوق به سؤالات زیر پاسخ دهد:

الف) تابعی بنویسید که ارتفاع کابین A را از سطح زمین بر حسب زمان نشان بدهد.

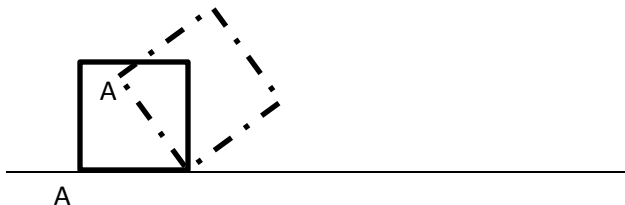
ب) نمودار حرکت کابین را در یک دور کامل رسم کنید.



۲- مطابق شکل زیر، مربعی به ضلع ۲cm بر رئوس خود روی یک صفحه افقی و در امتداد یک خط راست می غلتد، بدون اینکه بلغزد. حرکت را از رأس A شروع می کند و تا زمانی می غلتد که نقطه ی A دوباره به سطح افقی مفروض برسد.

الف) نمودار مسیر حرکت نقطه A را رسم کنید.

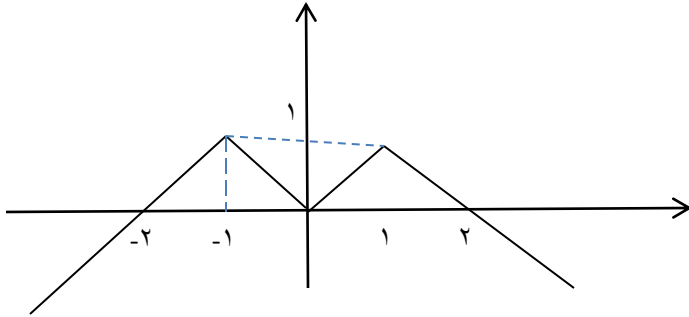
ب) طول مسیر حرکت نقطه A و مساحت زیر مسیر و بالای صفحه مفروض را به دیست آورید.



۳- نمودار یک تابع f به صورت زیر داده شده است. دامنه تابع g با ضابطه

$$g(x) = \sqrt{\frac{x}{1-|f(x)|}}$$

را تعیین کنید.



۴- در بین ۵ دانش آموز سال اول، ۴ دانش آموز سال دوم و ۶ دانش آموز سال سوم،

الف) در چند حالت، روز تولد دانش آموزان، هم پایه یکسان نیست؟

ب) در چند حالت، روز تولد دانش آموزان، هم پای یکسان نیست؟

۵- ۳ عدد مثبت a, b, c مفروض است. فرض کنید که

$$y = \log_b ca \quad x = \log_a bc \quad z = \log_c ab$$

$$xyz = x + y + z + 2 \quad \text{ثابت کنید که}$$

۶- در شکل زیر، نشان دهید که اگر $AB^2 + CD^2 = 4R^2$ آنگاه قطرهای AC و BD بر هم عمودند.

